

1 Die Abnahme der Temperatur T (Abkühlung) eines Körpers kann mit dem Newton'schen Abkühlungsgesetz beschrieben werden. In die entsprechende Differenzengleichung geht dabei die Umgebungstemperatur $T_U=22^\circ\text{C}$ (eine Art untere Sättigungsgrenze) und die Änderungsrate $k=0,972$ ein. Die Ausgangstemperatur des Objektes beträgt 72°C .

Stelle die Differenzengleichung für den oben beschriebenen Zusammenhang auf.

$$T_{n+1}=T_n+k\cdot(T_U-T_n)=T_n+0,972\cdot(22-T_n)$$

Trage die Temperatur für die ersten 10 Sekunden in unten stehende Tabelle ein.

Zeit [s]	Temperatur [$^\circ\text{C}$]
0	72
1	23,4
2	22,04
3	22
4	22
5	22
6	22
7	22
8	22
9	22
10	22

2 Die zur obigen Differenzengleichung gehörende Differenzialgleichung (DGLG) lautet:

$$\frac{dT}{dt}=k\cdot(T_U-T) \text{ mit } T_0=72 \text{ und } T_U=22$$

Bestimme die Lösung dieser DGLG mittels GeoGebra und zeichne diese in das Koordinatensystem ein, welches das entsprechende Richtungsfeld angibt (Ausdruck!).

$$T(t)=50\cdot e^{-0,972\cdot t}+22, \text{ für Richtungsfeld siehe GeoGebra-Datei.}$$

3-Profi Vergleiche die Ergebnisse der Differenzengleichung (Punkte in das Koordinatensystem eintragen) mit der Lösungsfunktion der DGLG. Was fällt Dir auf?

Um die Ergebnisse einer Differenzengleichung zu verbessern und die Genauigkeit zu erhöhen, kann der Zeitschritt geändert werden. Erstelle eine neue Gleichung mit dem Zeitschritt $t=0,1\text{ s}$ und vergleiche wieder mit der Lösungsfunktion der DGLG.

Die Einteilung der Zeit in Sekundenabstände ist zu grob. Zehntelsekunden sind für die Differenzengleichung sinnvoller, die entsprechende Gleichung lautet daher

$$T_{n+1}=T_n+0,972\cdot(22-T_n)\cdot 0,1.$$

Zeit [s]	Temperatur [°C]
0	72
0,1	67,14
0,2	62,75
0,3	58,79
0,4	55,22
0,5	51,99
0,6	49,08
0,7	46,44
0,8	44,06
0,9	41,92
1,0	39,98

Im GeoGebra-File ist die Lösung der DGLG (die mathematisch *korrekte*) rot eingezeichnet, die schwarzen Punkte markieren die Differenzengleichung mit Sekundenschritten, die blauen jene mit Zehntelsekundenschritten. Das Richtungsfeld lässt sich im Algebrafenster ein- und ausschalten.