Schrittweise DGL-Modellierung für den freien Fall:

Im Folgenden bezeichnet v stets die Fallgeschwindigkeit und h die Höhe über dem Erdboden, insbesondere ist $\dot{h}(t) = -v$.

- Kein Luftwiderstand:

$$\dot{v} = g \Rightarrow v(t) = v_0 + gt, \qquad \ddot{h} = -g \Rightarrow h(t) = h_0 - v_0 t - g\frac{t^2}{2}$$

- Mit Newton-Reibung (laminare Strömung):

$$\dot{v} = g - c_N v \qquad \ddot{h} = -g - c_N \dot{h}$$

- Mit Stokes-Reibung (Wirbel):

$$\dot{v} = g - c_S v^2 \qquad \ddot{h} = -g + c_S \dot{h}^2$$

  (noch exakt lösbar - Variation der Konstanten)

- Exponentiell abnehmende Atmosphärendichte (große Absprungshöhe):

$$\ddot{h} = -g + ce^{-h/h_0}\dot{h}^2 = 0$$

- Bei Sprüngen aus der Stratosphäre spielen noch andere Effekte eine Rolle:
  - Vertikaler Temperaturgradient - Atmosphärendichte nicht exponentiell.
  - Strömungswiderstandsanstieg bei Durchbrechen der „Schallmauer“.

Realistische Modellierung der Atmosphärendichte führt zu DGL, die nur noch numerisch lösbar sind.

$\overset{LP}{\to}$ Vertiefungs- und Erweiterungsstoff AHS 12. Schulstufe: Numerische Methoden, Programmierung mathematischer Verfahren, Approximations- und Interpolationsverfahren, Differenzengleichungen und Differentialgleichungen

Euler-Verfahren für DGL 1. Ordnung:

Betrachte das **Anfangswertproblem**

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad (\mathbf{AWP})$$

mit $F : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und global Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments, d.h.

$$\exists\, L > 0 : \forall\, (t, x), (t, y) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n : \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Dann besitzt (**AWP**) eine **eindeutige Lösung** auf dem Intervall $[t_0, T]$. Sei $x(t)$ der Wert der Lösung zur Zeit t und $h > 0$ eine gewisse **Schrittweite**. Durch Integration von (**AWP**) erhalten wir

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} F(s, x(s))ds$$

und ersetzen nun das Integral durch die Rechtecksfläche $h \cdot F(t, x(t))$. Bei fester Schrittweite Δt führt dies zur Differenzengleichung

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \cdot F(t_n, x_n) \qquad (t_{n+1} = t_n + \Delta t),$$

wobei x_n eine Approximation der Lösung der DGL zur Zeit t_n (also $x(t_n)$) ist.
Implementierung des Eulerverfahrens in Tabellenkalkulation:

n	t_n	x_n	$F(t_n, x_n)$
0	t_0	x_0	$F(t_0, x_0)$
1	$t_0 + \Delta t$	$x_0 + \Delta t \cdot F(t_0, x_0)$	$F(t_1, x_1)$

Achtung: Die Beschreibung des LöseDgl-Befehls in der Befehlreferenz von GeoGebra ist etwas irreführend, die korrekte Syntax lautet (nur mit ö statt oe):

LöseDgl($y' = F(x, y), (x_0, y_0)$) bzw. LöseDgl($y'' = F(x, y, y'), (x_0, y_0), (x_0, y_0')$),

d.h. die Zahlenpaare sind die Anfangsdaten und nicht die Werte der rechten Seite der DGL.