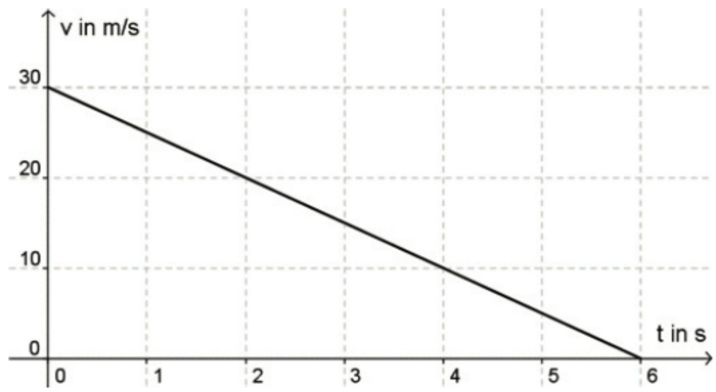
Workshop zu naturwissenschaftlichen Kontextaufgaben

AHS-Bundesseminar, 24. 2. 2015, C. Spreitzer

Ausgewählte Aufgaben aus dem Aufgabenpool des BIFIE:

BIFIE 1 **Bremsvorgang:**

Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von $v = 30\ m/s$ und bremst wegen eines auf der Fahrbahn liegenden Hindernisses ab. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Bremsvorgang. Die Abbildung zeigt modellhaft das t-v-Diagramm für einen Bremsvorgang.



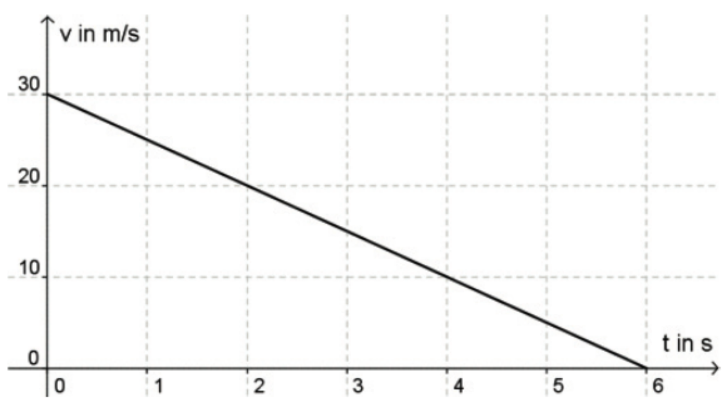
Aufgabenstellungen:

a) Bestimmen Sie $v'(t)$ und deuten Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit dem Bremsvorgang.

b) Ermitteln Sie die absolute und die relative Abnahme der Geschwindigkeit des PKW während der ersten beiden Sekunden des Bremsvorgangs.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ für den Zeitraum des Bremsvorgangs. Begründen Sie, wie sich eine Änderung der Anfangsgeschwindigkeit auf den Verlauf des Graphen von $v(t)$ auswirkt, und interpretieren Sie deren Bedeutung für den Bremsvorgang.

d) Interpretieren Sie $\int_0^4 v(t)dt$. Stellen Sie das Ergebnis dieses Ausdrucks in der folgenden Abbildung dar.



BIFIE 2 **Hohlspiegel:**

In der Physik spricht man von einem kugelförmigen Hohlspiegel, wenn er Teil einer innenverspiegelten Kugel ist. Charakteristische Punkte beim Hohlspiegel sind der Mittelpunkt M der Kugel, der Scheitelpunkt S und der Brennpunkt F des Spiegels.

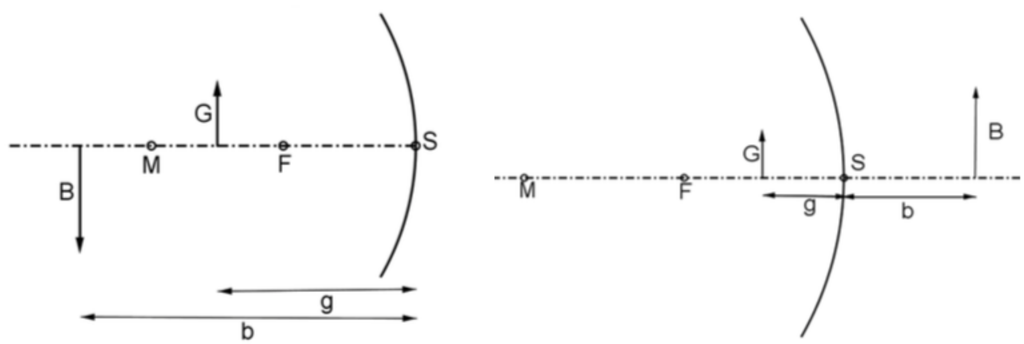
Es gelten folgende Relationen (siehe untenstehende Abbildungen):

Brennweite f des Spiegels: $f = \overline{FS} = \frac{\overline{MS}}{2}$ $(f > 0)$
Radius der Kugel: $\overline{MS} = 2 \cdot f$

Die Entfernung eines Gegenstands G (mit der Höhe G) vom Scheitelpunkt S wird mit g $(g > 0)$ bezeichnet, die Entfernung des nach Reflexion der Strahlen am Spiegel entstehenden Bildes B (mit der Höhe B) vom Scheitel S mit b.

Das Vorzeichen von b hat dabei die folgenden Bedeutungen:
- $b > 0$: Es entsteht ein reelles Bild „vor" dem Spiegel, das auf einem Schirm aufgefangen werden kann.
- $b < 0$: Es entsteht ein virtuelles Bild „hinter" dem Spiegel.

Skizzen des Querschnitts:
- linke Grafik: reelles Bild B eines Gegenstandes G $(b > 0)$
- rechte Grafik: virtuelles Bild B eines Gegenstandes G $(b < 0)$



Aufgrund physikalischer Überlegungen gelten unter bestimmten Bedingungen die Beziehungen $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$ und $\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f}$. Daraus ergibt sich der Zusammenhang $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Der Quotient $\frac{B}{G}$ bestimmt den Vergrößerungsfaktor; er ist bei einem reellen Bild positiv $(g > 0$ und $b > 0)$ und bei einem virtuellen Bild negativ $(g > 0$ und $b < 0)$.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie den Vergrößerungsfaktor $\frac{B}{G}$ für $f = 40$ cm und $g = 50$ cm an!

Geben Sie ein Intervall für die Gegenstandsweite g an, damit ein virtuelles Bild entsteht!

Begründen Sie Ihre Antwort durch eine mathematische Argumentation!

b) Stellen Sie die Bildweite b als Funktion der Gegenstandsweite g bei konstanter Brennweite f dar! Betrachten Sie die Fälle $g = 2f$ sowie $g = f$ und geben Sie die jeweilige Auswirkung für b an!

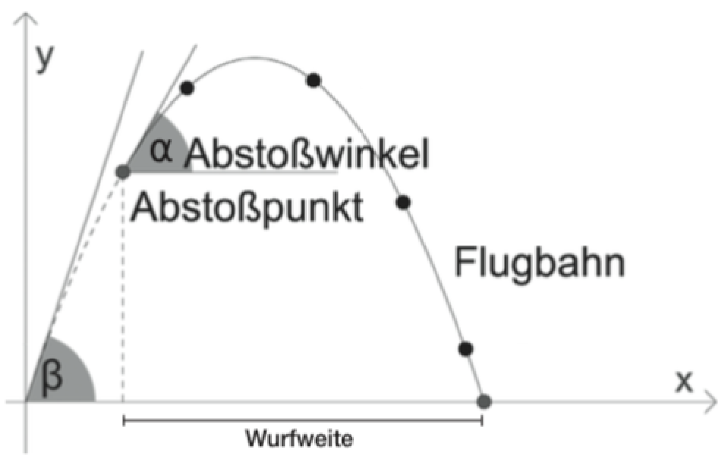
Was kann mithilfe dieser Funktion über den Grenzwert von b ausgesagt werden, wenn $g > f$ ist und sich g der Brennweite f annähert? Tätigen Sie eine entsprechende Aussage und begründen Sie diese durch Betrachtung von Zähler und Nenner!

c) Leiten Sie aus den gegebenen Beziehungen $\frac{G}{B}$ die oben angeführte Formel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ her! Geben Sie die notwendigen Umformungsschritte an!

Der Ausdruck $\frac{1}{b}$ kann als Funktion in Abhängigkeit von g der Form $\frac{1}{b}(g) = a \cdot g^k + c$ betrachtet werden. Geben Sie die Werte der Parameter a und c sowie des Exponenten k für diesen Fall an!

BIFIE 3 Kugelstoßen:

Für die Beschreibung der Flugbahn der gestoßenen Kugel beim Kugelstoßen kann mit guter Näherung die Gleichung der Wurfparabel verwendet werden.
Diese Gleichung lautet: $y = \tan \beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x^2$ ($g = 9{,}81$ m/s²).
Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit der Kugel und β der Winkel, unter dem die Parabel die x-Achse schneidet.
Die größte Wurfweite wird für $\beta = 45°$ erzielt.



Die Computersimulation der Flugbahn der gestoßenen Kugel eines Athleten ergab für eine Gleichung der Bahnkurve $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$. Der Abstoßpunkt der Kugel befand sich in einer Höhe von 2,1 m.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Größe des Abstoßwinkels α und die maximale Höhe, die von der Kugel des Athleten erreicht wurde! Runden Sie auf cm!

b) Welche Wurfweite hat der Athlet erzielt? Welchen Einfluss hat die Größe der Fallbeschleunigung g bei sonst gleichen Bedingungen auf die Wurfweite? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Berechnen Sie für die Bahnkurve $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$ die Größe des Winkels β und überprüfen Sie, ob dieser Athlet die größte Wurfweite erreicht hat!
Erläutern Sie, ob anhand der Parameter a und b in der allgemeinen Bahnkurve $y = ax - bx^2$ bereits feststellbar ist, ob eine Athletin/ein Athlet die größte Wurfweite erzielt hat!

Weitere physikalische Kontextaufgaben (Grundlage für Typ-2-Aufgaben):

PH 1 **Sprintstrecken:** Die Weltrekorde für kurze Sprintstrecken seien 5.56s über 50m und 6.39s über 60m sowie 9.58s über 100m. In einem einfachen Modell nehmen wir an, dass ein Sprinter aus der Ruhe starte, für eine kurze Zeit T mit konstanter Beschleunigung a beschleunige und schließlich mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 = aT$ weiterlaufe. [nach „Physik" von Paul A. Tipler (Spektrum Verlag, 3. Auflage), S. 41]

a) Wie wächst der zurückgelegte Weg mit der Zeit t nach diesem Modell für $t < T$ und wie für $t > T$?

b) Stellen Sie die zurückgelegte Strecke s für $t > T$ als Funktion von t dar!

c) Tragen Sie in einem Diagramm die gegebenen Strecken der Weltrekorde gegen die Rekordzeiten auf!

d) Legen Sie durch die Punkte im Diagramm eine Ausgleichsgerade und bestimmen Sie ihre Steigung und ihren Schnittpunkt mit der Zeitachse.

e) Berechnen Sie die Anfangsbeschleunigung a mithilfe der Tatsache, dass die Steigung der Ausgleichsgeraden v_0 entspricht und der Schnittpunkt mit der t-Achse bei $\frac{1}{2}T$ liegt!

f) Diskutieren Sie die Anwendbarkeit dieses einfachen Modells auf Rennen über 200m und noch längere Strecken!

PH 2 **Gravitationsrotverschiebung:** Die Energie eines Photons (Lichtquants) der Frequenz ν bzw. der Wellenlänge λ ist

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}.$$

Hierin ist $h \approx 6.626 \cdot 10^{-34}$Js die Plancksche Konstante und $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ die Lichtgeschwindigkeit. Nach Einstein sind Energie und Masse äquivalent - dies wird in der berühmten Formel $E = mc^2$ ausgedrückt. Einem Photon der Energie $h\nu$ kann demnach eine äquivalente Masse $m = \frac{h\nu}{c^2}$ zugeordnet werden. Auf ein von einem Stern emittiertes Photon wirkt daher wie für massebehaftete Teilchen die Gravitationskraft des Sterns und es muss für die Überwindung des Gravitationsfeldes beim Verlassen des Sterns Arbeit verrichten. Die Energie des Photons nimmt dabei ab und es kommt zu einer Rotverschiebung z der Wellenlänge gemäß der Formel

$$z := \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \approx \frac{GM}{Rc^2}.$$

Hierin ist λ_1 die Wellenlänge des Photons direkt bei der Emission, λ_2 die größere Wellenlänge nach dem Verlassen des Gravitationsfeldes des Sterns, M die Masse des Sterns, R der Radius des Sterns und $G \approx 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kgs}^2}$ die Newtonsche Gravitationskonstante.

a) Der Stern Sirius B ist ein sogenannter Weißer Zwerg, er hat in etwa die Masse unserer Sonne ($M = 2 \cdot 10^{30}$kg), ist aber nur so groß wie die Erde (Erdradius: $R = 6.37 \cdot 10^6$m). Wie groß ist die Gravitationsrotverschiebung z des von Sirius B ausgesandten Lichts?

b) Welche Wellenlänge λ_2 besitzt ein Photon nach Verlassen des Gravitationsfeldes von Sirius B, wenn es mit einer Wellenlänge $\lambda_1 = 650$nm emittiert wurde?

c) Wie hängt die absolute änderung der Wellenlänge $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ von der Wellenlänge λ_1 bei der Emission ab?

d) Der Radius der Sonne ist etwa 120mal so groß wie Sirius B. Ist ihre Gravitationsrotverschiebung damit größer oder kleiner als jene von Sirius B?

$\boxed{\textbf{PH 3}}$ **Energiesparlampe:** Eine Energiesparlampe kostet etwa 20 Euro und hat eine Lebensdauer von 8000h. Bei einem Stromverbrauch von 20W erzeugt sie die gleiche Lichtleistung wie eine herkömmliche 75W-Glühbirne. Diese kostet etwa 2 Euro und hat eine mittlere Lebensdauer von 1200h. [nach „Physik“ von Paul A. Tipler (Spektrum Verlag, 3. Auflage), S. 41]

a) Welchen Betrag spart ein Vier-Personen-Haushalt durch Einsatz von Energiesparlampen, wenn im Mittel sechs 75W-Glühbirnen eingeschaltet sind und die kWh Strom 15 Cent kostet?

b) Bei welchem Strompreis ergibt sich keine Einsparung?

Zusätzliche „Aufgabenskelette“ (Ausgangspunkte für Typ-2-Aufgaben):

$\boxed{\textbf{S 1}}$ **Lichtbrechung:** Trifft Licht auf eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien unterschiedlicher Brechungsindizes, so wird der durchgehende Lichtstrahl entsprechend dem Snelliusschen Brechungsgesetz abgelenkt („gebrochen“):

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

Hier sind $n_{1,2}$ die Brechungsindizes der beiden Medien und $\alpha_{1,2}$ die zum Lot gemessenen Winkel. Ein Teil des Lichts wird reflektiert, der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.

Skizzen für mögliche Fragen: Wie verhalten sich die Winkel bei vorgegebenen Brechzahlen? Wann kommt es zur Totalreflexion (Austrittswinkel $\pi/2$)? Für welchen Einfallswinkel verläuft der gebrochene Lichtstrahl senkrecht zum reflektierten Lichtstrahl (der sogenannte Brewsterwinkel)?

$\boxed{\textbf{S 2}}$ **Gravitationsfeld:** Nach Newtons Gravitationsgesetz wird ein Körper der Masse m im Schwerefeld eines Planeten (oder eines Sterns) der Masse M mit einer Kraft

$$F(r) = G\frac{Mm}{r^2}$$

vom Planeten angezogen, wobei r der Abstand des Raumschiffs vom Schwerpunkt des Planeten (oder Sterns) ist. Während sich ein Körper im Gravitationsfeld von einem Ort mit Distanz r_1 zum Schwerpunkt des Planeten zu einem Ort mit Distanz r_2 bewegt, verrichtet er die Arbeit

$$\Delta W = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr.$$

Skizzen für mögliche Fragen: Welche Geschwindigkeit v benötigt ein Satellit, um in einem gewissen Abstand um die Erde zu kreisen (Zentrifugalkraft $F_Z = mv^2/r$ mit Anziehungskraft gleichsetzen)? In welchem Abstand zur Erde befinden sich geostationäre Satelliten? Welche Anfangsgeschwindigkeit muss ein Geschoß besitzen, um das Schwerefeld der Erde zu überwinden (die sogenannte Fluchtgeschwindigkeit)?

$\boxed{\textbf{S 3}}$ **Stefan-Boltzmann-Gesetz:** Ein (schwarzer) Körper der Oberfläche A und der Temperatur T emittiert nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz eine Strahlungsleistung

$$P = \sigma A T^4,$$

wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante ist.

Skizzen für mögliche Fragen: Abhängigkeit von Fläche und Temperatur; abgestrahlte Energie in einem bestimmten Zeitraum; Cepheiden (pulsationsveränderliche Sterne): Radius verändert sich periodisch, z.B. $r(t) = R_0 \sin(\omega t)$ - was bedeutet dies für die emittierte Strahlungsleistung?

S 4 **Harmonischer Oszillator:** Die Auslenkung eines harmonischen Oszillators (z.B. ein Federpendel) als Funktion der Zeit ist z.B. durch $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$ gegeben (A ist die Amplitude der Schwingung, $\omega_0 = k/m$ ist die Kreisfrequenz mit der Federkonstante k und der schwingenden Masse m). Allgemein gehorchen die Schwingungen eines harmonischen Oszillators der Differentialgleichung $x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$.

Skizzen für mögliche Fragen: Zeige, dass die gegebene Funktion $x(t)$ die DGL erfüllt. Berechne den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit $x'(t)$ des Pendels! Berechne die kinetische Energie zur Zeit t. Berechne die potentielle Energie als Arbeit, die das Pendel von der Ruhelage bis zur maximalen Auslenkung A gegen die Federkraft $F = -kx$ verrichtet. Drücke die potentielle Energie als Funktion der Zeit aus und überprüfe, dass die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant bleibt (Energieerhaltung).

Hinweise für die Erstellung von Typ-1- und Typ-2-Aufgaben (Quelle: BIFIE):

Die Aufgaben der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung können zwei unterschiedlichen Typen zugeordnet werden:

- Typ-1-Aufgaben sind Aufgaben, die auf die im Katalog angeführten Grundkompetenzen fokussieren. Bei diesen Aufgaben sind kompetenzorientiert (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten ohne darüber hinausgehende Eigenständigkeit nachzuweisen.

- Typ-2-Aufgaben sind Aufgaben zur Anwendung und Vernetzung der Grundkompetenzen in definierten Kontexten und Anwendungsbereichen. Dabei handelt es sich um umfangreichere kontextbezogene oder auch innermathematische Aufgabenstellungen, im Rahmen derer unterschiedliche Fragestellungen bearbeitet werden müssen und bei deren Lösung operativen Fertigkeiten gegebenenfalls größere Bedeutung zukommt. Eine selbstständige Anwendung von Wissen und Fertigkeiten ist erforderlich.

Die Typ-2-Aufgaben sollen die bildungstheoretische Orientierung des Konzepts hervorheben, um die notwendige Positionierung mittels Kritik und Bewertung im mathematischen Grundbildungsspektrum abzubilden. Eine konkretere Beschreibung bzw. Vorstellung der Typ-2-Aufgaben in der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung soll die folgende Charakterisierung vermitteln. Zudem stellt diese eine Orientierung für die Vorbereitung der Schüler/innen dar:

- Die Präsentation der Aufgabe erfolgt durch einen einleitenden Text, der das Thema der Aufgabe darlegt. Der Text hat informativen (erklärenden) Charakter. Er kann auch Informationen und Aussagen enthalten, die für die Lösung der Fragen nicht unmittelbar von Bedeutung sind.

- Die Aufgaben sind umfangreicher und komplexer, d. h. es werden zu einem speziellen „Thema" verschiedene inhaltlich zusammenhängende Fragen gestellt.

- Die Teilaufgaben einer Aufgabe sind voneinander unabhängig, sodass eine Fehlleistung bei einer Fragestellung die weitere Bearbeitung der Aufgabe nicht unmöglich macht.

- Es kann sich um anwendungsorientierte, kontextorientierte oder innermathematische Problemstellungen handeln.

- Liegen Anwendungsbezüge außerhalb des Kontextkatalogs, werden notwendige Sachzusammenhänge, Begriffe und Größen im Rahmen des einleitenden Textes erläutert.

- Anwendungs- oder Realitätsbezüge werden so gewählt, dass sie zu einer inhaltlich sinnvollen und verständnisorientierten Anwendung der Mathematik im Sinne der bildungstheoretischen Konzeption der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung führen.