

Aufgabe 2

Überlagerung von Schwingungen

Ein Ton in der Musik kann im einfachsten Fall durch eine Sinusfunktion s mit $s(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Bei einer derartigen Sinusschwingung wird der maximale Funktionswert als Amplitude bezeichnet. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde wird als Frequenz f bezeichnet und in Hertz (Hz) angegeben.

Für die Frequenz f gilt: $f = \frac{1}{T}$ (mit T in Sekunden), wobei T die (kleinste) Periodenlänge der jeweiligen Sinusschwingung ist ($T \in \mathbb{R}^+$).

Drei bestimmte Töne werden mithilfe der nachstehenden Funktionen h_1, h_2 und h_3 beschrieben. Die Zeit t ($t \geq 0$) wird dabei in Millisekunden (ms) gemessen.

$$h_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$$

$$h_2(t) = \sin(2,5 \cdot \pi \cdot t)$$

$$h_3(t) = \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$$

Die Überlagerung mehrerer Töne bezeichnet man als Klang.

Die Funktion h mit $h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$ beschreibt einen Klang.

Der Schalldruck eines Tons ist zeitabhängig und kann durch die Funktion p mit $p(t) = \bar{p} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschrieben werden. Dabei sind \bar{p} und ω Konstanten.

Der Schalldruck wird in der Einheit Pascal (Pa) angegeben.

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie für einen Ton, der mithilfe der Funktion g mit $g(t) = \sin(c \cdot \pi \cdot t)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und t in ms beschrieben wird, eine Formel für die Periodenlänge T (in ms) in Abhängigkeit von c an!

Der Effektivwert p_{eff} des Schalldrucks einer Sinusschwingung mit der Periodenlänge T (in ms) kann mit der Formel $p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt}$ berechnet werden.

Berechnen Sie den Effektivwert des Schalldrucks eines Tons, wenn $\bar{p} = 1$ und $\omega = 2 \cdot \pi$ gilt!

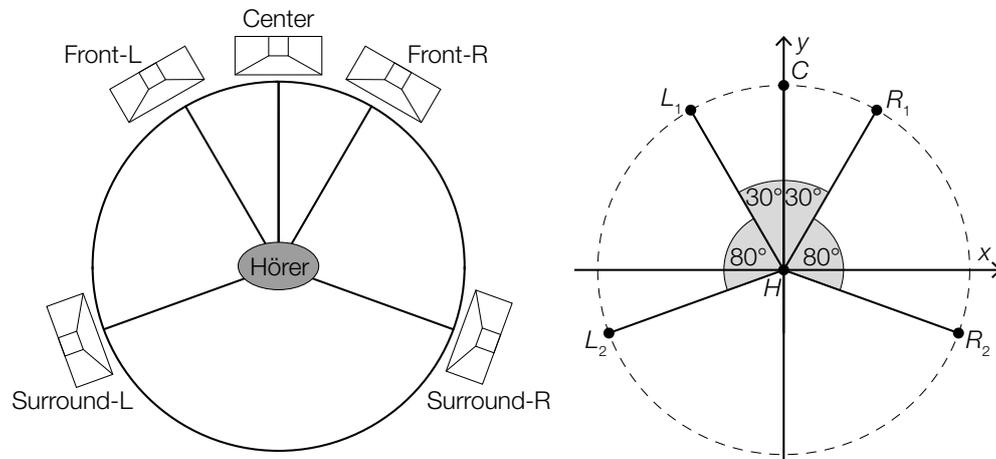
- b) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die (kleinste) Periodenlänge T (in ms) der Funktion h an!

Geben Sie die Frequenz f der Funktion h in Hertz an!

- c) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die Amplitude der Funktion h und denjenigen Zeitpunkt $t \geq 0$ (in ms) an, zu dem die Amplitude erstmals erreicht wird!

Begründen Sie, warum die Amplitude von h nicht gleich der Summe der drei Amplituden der Funktionen h_1, h_2 und h_3 ist!

- d) Für ein angenehmes Raumklangerlebnis (z. B. in einem Heimkino) ist es günstig, wenn die fünf Lautsprecher eines Fünf-Kanal-Tonsystems wie in nachstehender linker Skizze dargestellt angeordnet sind (Ansicht von oben). Vereinfacht kann die Anordnung wie in nachstehender rechter Skizze in einem kartesischen Koordinatensystem (Einheit in Metern) dargestellt werden:



Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/5.1> [23.04.2018] (adaptiert).

Jeder der fünf Lautsprecher (C , L_1 , L_2 , R_1 , R_2) ist in diesem Fall 2 m vom Hörer (H) entfernt. Der Punkt H liegt im Koordinatenursprung.

A) Geben Sie die kartesischen Koordinaten von R_1 an!

Geben Sie die Entfernung zwischen L_2 und R_2 an!